

ANDRÉ SEIJI SANDES IANAGUI
CARLOS EDUARDO CAPARROZ DUARTE

**Projeto de um novo sistema de controle para motores de imã
permanente sem escovas**

Monografia apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a disciplina
PMR2550 – Projeto de Conclusão de Curso II.

São Paulo
2008

ANDRÉ SEIJI SANDES IANAGUI
CARLOS EDUARDO CAPARROZ DUARTE

**Projeto de um novo sistema de controle para motores de imã
permanente sem escovas**

Monografia apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a disciplina
PMR2550 – Projeto de Conclusão de Curso II.
Área de concentração: Engenharia Mecatrônica
Orientador: Prof. Dr. Eduardo L. L. Cabral

São Paulo

2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Ianagui, André Seiji Sandes

Projeto de um novo sistema de controle para motores de imã permanente sem escovas / A.S.S. Ianagui, C.E.C. Duarte. -- São Paulo, 2008.

67 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Sistemas de controle (Projeto) 2. Sistemas numéricos 3. Motores elétricos 4. Máquinas elétricas I. Duarte, Carlos Eduardo Caparroz II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos III. t.

RESUMO

Servo motores de ímã permanente sem escovas são utilizados amplamente na indústria para as mais diversas aplicações, onde a elevada precisão de posicionamento, de velocidade e de controle de torque são fatores cruciais para o funcionamento satisfatório de um sistema. Entre estas aplicações destacam-se os manipuladores robóticos e sistemas de posicionamento por comando numérico, que devido aos fatores citados anteriormente, associados à baixíssima necessidade de manutenção e à alta relação potência/peso, utilizam motores sem escovas para o seu acionamento. A estratégia clássica de controle para motores em geral (entre eles os motores aqui citados) utiliza controladores PID em cascata para amplificar o sinal de erro e gerar o sinal de referência. Motores sem escovas de acionamento senoidal especificamente possuem uma modelagem matemática um pouco mais complexa, que envolve transformações lineares e a adoção de mais de uma variável de entrada na planta, possibilitando controle multivariável. O objetivo deste trabalho é projetar e simular o funcionamento de uma nova arquitetura de controle baseada na realimentação integral das variáveis de estado de um motor de ímã permanente sem escovas. Entre as vantagens desse tipo de controlador estão a possibilidade de maior robustez, melhor resposta dinâmica e maior simplicidade na sintonia dos ganhos de controle. Por outro lado, sua principal desvantagem é a necessidade de uma boa modelagem matemática da planta a ser controlada.

ABSTRACT

Permanent magnet brushless motors are widely used in industry in the most different applications, where high precision in positioning, rotation and torque control are decisive factors for a satisfactory work of a system. Among these applications we can highlight robotic manipulators, which, because of these factors and low need of maintenance and the high power/weight, use Brushless motors in their drive. The classical control strategy for servo motors in general (including the ones explained in this work) uses PID controllers in cascade to amplify the error signal and generate the motor's reference. Brushless Motors with sinusoidal drive have a complex mathematical modeling, which involves linear transforms and the use of more than one control variable in the controlled system, making multi-variable control possible. The objective of this work is to design and simulate the work of a new control architecture for a permanent magnet brushless motor, based in integral state feedback of the state variables from the motor. The advantages of this technique are the possibility of robust control, better dynamic response and simpler control gains tuning. It's main disadvantage is the need of a good mathematical modeling of the system to be controlled.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE SÍMBOLOS	9
1. INTRODUÇÃO.....	11
2. OBJETIVO E JUSTIFICATIVA.....	12
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
3.1. Princípio de funcionamento	13
3.2. Modelagem Matemática	15
3.3. Sistema em tempo discreto.....	29
3.4. Acionamento	31
3.5. Sensoriamento	33
3.6. Freio Eletromagnético	35
4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	36
4.1. Tipo de Controlador.....	36
4.2. Variáveis de Projeto	38
4.3. Controle integral por realimentação de estados	41
4.4. Controlador em tempo discreto	45
4.5. Controle por ganhos variáveis.....	46
4.6. Projeto por alocação de pólos para o motor de testes utilizando ganhos variáveis.....	48
4.7. Projeto pelo método de Otimização Linear Quadrática (LQR)	51

5. RESULTADOS	55
6. CONCLUSÃO	61
Apêndice A - Funções de Matlab para auxílio no projeto	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Funcionamento dos campos girantes (DOTE; KINOSHITA, 1990)	14
Figura 2 - Estrutura do motor trifásico ideal (DOTE; KINOSHITA, 1990)	16
Figura 3 - Diagrama de blocos do motor sem escovas	27
Figura 4 - Geração da PWM (DOTE; KINOSHITA, 1990)	32
Figura 5 - Ponte Inversora Trifásica (El-Sharkawi, 2000)	33
Figura 6 - Funcionamento do Encoder ótico	34
Figura 7 - Controle vetorial de um motor de imã permanente sem escovas usando controladores PI (KAWEJINDA, KONGHIRUN, 2007)	37
Figura 8 - Requisitos de projeto (OGATA,2003)	39
Figura 9 - Diagrama de blocos do sistema	48
Figura 10 - Sistema de controle simulado	49
Figura 11 – Resposta do controle por alocação para entrada degrau	50
Figura 12 - Resposta do sistema utilizando LQR	53
Figura 13 - Sistema de controle de velocidade	55
Figura 14 - Sistema de controle de posição	55
Figura 15 – Simulação da resposta de velocidade	57
Figura 16 - Simulação da resposta de posição	57
Figura 17 - Correntes em controle de Velocidade	58
Figura 18 - Correntes em controle de Posição	59
Figura 19 - Sinais de controle (Velocidade)	60
Figura 20 - Sinais de controle (Posição)	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Sistemas padrão Bessel para tempo de assentamento de 1s.....	40
Tabela 2 - Parâmetros de projeto.....	48
Tabela 3 - Ganhos.....	48
Tabela 4 - Características do Motor	56

LISTA DE SÍMBOLOS

V_a, V_b, V_c	tensão instantânea aplicada nas fases a, b e c do estator.
V_A, V_B, V_C	tensão instantânea aplicada nas fases A, B e C do rotor.
i_a, i_b, i_c	corrente instantânea nas fases a, b e c do estator.
i_A, i_B, i_C	corrente instantânea nas fases A, B e C do rotor.
$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$	fluxo magnético instantâneo nas fases a, b e c do estator.
$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$	fluxo magnético instantâneo nas fases A, B e C do rotor.
r_1	resistência do estator.
r_2	resistência do rotor.
L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}	auto indutância das fases a, b e c do estator.
L_{AA}, L_{BB}, L_{CC}	auto indutância das fases a, b e c do rotor.
L_{ab}, L_{bc}, L_{ca}	indutância mútua das fases do estator.
L_{AB}, L_{BC}, L_{CA}	indutância mútua das fases do rotor.
L_{aA}, L_{bB}, L_{cC}	indutância mútua entre o estator e o rotor.
V_{1q}, V_{1d}	tensão instantânea no estator nos eixos d e q .
V_{2q}, V_{2d}	tensão instantânea no rotor nos eixos d e q .
i_{1q}, i_{1d}	corrente instantânea no estator nos eixos d e q .
i_{2q}, i_{2d}	corrente instantânea no rotor nos eixos d e q .
$\lambda_{1q}, \lambda_{1d}$	fluxo magnético instantâneo no estator nos eixos d e q .
$\lambda_{2q}, \lambda_{2d}$	fluxo magnético instantâneo no rotor nos eixos d e q .
ω_1	velocidade angular da voltagem e da corrente no estator.
ω_2	velocidade angular do rotor.
θ_2	diferença angular entre o rotor e o estator.
s	escorregamento.
θ_s	ângulo do rotor para com o eixo d .
T_e	torque eletromagnético.
T_l	torque instantâneo da carga.
J	momento de inércia.
B	coeficiente de atrito viscoso.
V_m	valor máximo da tensão no estator.

α	fase da tensão no estator.
n	número de pólos.
R_a	resistência na armadura.
L_a	indutância na armadura.
Φ	fluxo magnético do imã permanente (constante).
ω_m	velocidade angular do motor.
v_d, v_d	tensão nos eixos q e d .
i_d, i_d	corrente nos eixos q e d .
k_v	constante de velocidade.
k_t	constante de torque.

1. INTRODUÇÃO

Os motores de imã permanente sem escovas são utilizados amplamente na indústria nas mais diversas aplicações, onde a elevada precisão de posicionamento, de rotação e de controle de torque são fatores cruciais para o funcionamento satisfatório do processo produtivo. Estes motores, por não possuírem escovas, não faíscam e nem produzem detritos como motores comuns de corrente contínua. Além disso, pelo fato de não possuírem enrolamentos no rotor, não transmitem calor para o eixo e conseqüentemente para a carga.

Motores sem escovas também apresentam vantagens em relação a motores de passo: Suportam grandes picos de torque e possuem alta relação torque/peso e baixa inércia.

Em contrapartida, o rotor de motores sem escovas é passível de desmagnetização e por isso não é recomendada sua aplicação quando seu rotor é submetido a altas temperaturas ou altas correntes elétricas. Outra grande desvantagem de motores sem escovas é o elevado custo de seus acionadores e do próprio motor.

Uma das principais aplicações dos motores de imã permanente sem escovas é o acionamento de manipuladores robóticos e máquinas de comando numérico computadorizadas. Isto se deve à alta precisão de controle, ótimo desempenho de velocidade e torque e de praticamente não necessitar de manutenção.

A estratégia clássica de controle para motores em geral (entre eles os motores aqui citados) utiliza controladores PID em cascata para amplificar o sinal de erro e gerar o sinal de controle. Motores sem escovas de acionamento senoidal especificamente possuem uma modelagem matemática um pouco mais complexa, que envolve transformações lineares e a adoção de mais de uma variável de entrada

na planta, possibilitando controle multivariável. Esta não é uma abordagem comumente utilizada, em geral pelo fato de controladores PID ou controladores com atraso ou avanço de fase já estarem bastante explorados. Entretanto, este esquema de controle possui vantagens, entre elas a possibilidade de maior robustez, melhor resposta dinâmica e maior simplicidade na sintonia dos ganhos de controle. Por outro lado, sua principal desvantagem é a necessidade de uma boa modelagem matemática da planta a ser controlada, o que nem sempre é fácil de se obter.

2. OBJETIVO E JUSTIFICATIVA

O presente trabalho visa projetar e simular o funcionamento de uma nova arquitetura de controle baseada na realimentação integral das variáveis de estado de um motor de imã permanente sem escovas. Propõem-se aqui sistemas de controle para posição e velocidade de um motor, utilizando técnicas de projeto básicas do chamado controle moderno (baseado em variáveis de estado).

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Princípio de funcionamento

Um motor sem escovas de imã permanente é um acionamento cujo rotor é formado por um ou vários imã permanentes. Nos motores mais comuns os imãs utilizados são constituídos de Alnico, Ferrita, Samacoba ou Neodímio-Ferro (DOTE; KINOSHITA, 1990). A polarização dos imãs é no sentido radial, de forma que o fluxo magnético se alinhe nesse sentido. Ao redor do rotor, na armadura, colocam-se enrolamentos sobre um núcleo de ferro, que são responsáveis pela variação no fluxo magnético que causa o movimento do rotor. De forma a minimizar a variação de torque, faz-se com que esses enrolamentos sejam trifásicos e excita-se tal circuito com correntes senoidais. Quando os acionadores trabalham dessa forma, chama-se o acionamento de motor de imã permanente síncrono de corrente alternada (GIERAS; WING, 1997). Uma outra forma de acionar tais motores é através de ondas trapezoidais. Nesse caso, os motores são simplesmente chamados de motores sem escovas de corrente contínua. Ressalta-se que a forma construtiva de ambos os tipos é parecida, somente a maneira de excitação de seus enrolamentos e a força contra eletromotriz gerada por eles se altera. A segunda forma de acionamento é mais simples, sendo bastante utilizada em sistemas embarcados, entretanto, a onda trapezoidal causa oscilações no torque. Por isso, para sistemas industriais que requerem elevada precisão de controle, motores com primeira forma de excitação são preferidos. É esta que será desenvolvida a seguir.

O princípio de funcionamento de um motor síncrono de corrente alternada é similar ao de um motor trifásico de corrente alternada clássico, com energização das bobinas em fase criando campos girantes. Os vetores de campo magnético gerados pelo estator (que estão defasados de 120°) possuem intensidade variável, já que são

senoidais. O vetor campo magnético resultante da somatória desses vetores tem uma intensidade constante, mas “gira” ao redor do eixo do rotor. Com o objetivo de diminuir a relutância, o campo magnético do rotor busca sempre se alinhar ao campo do estator, provocando a rotação do primeiro. A figura 1 ilustra o funcionamento dos campos girantes.

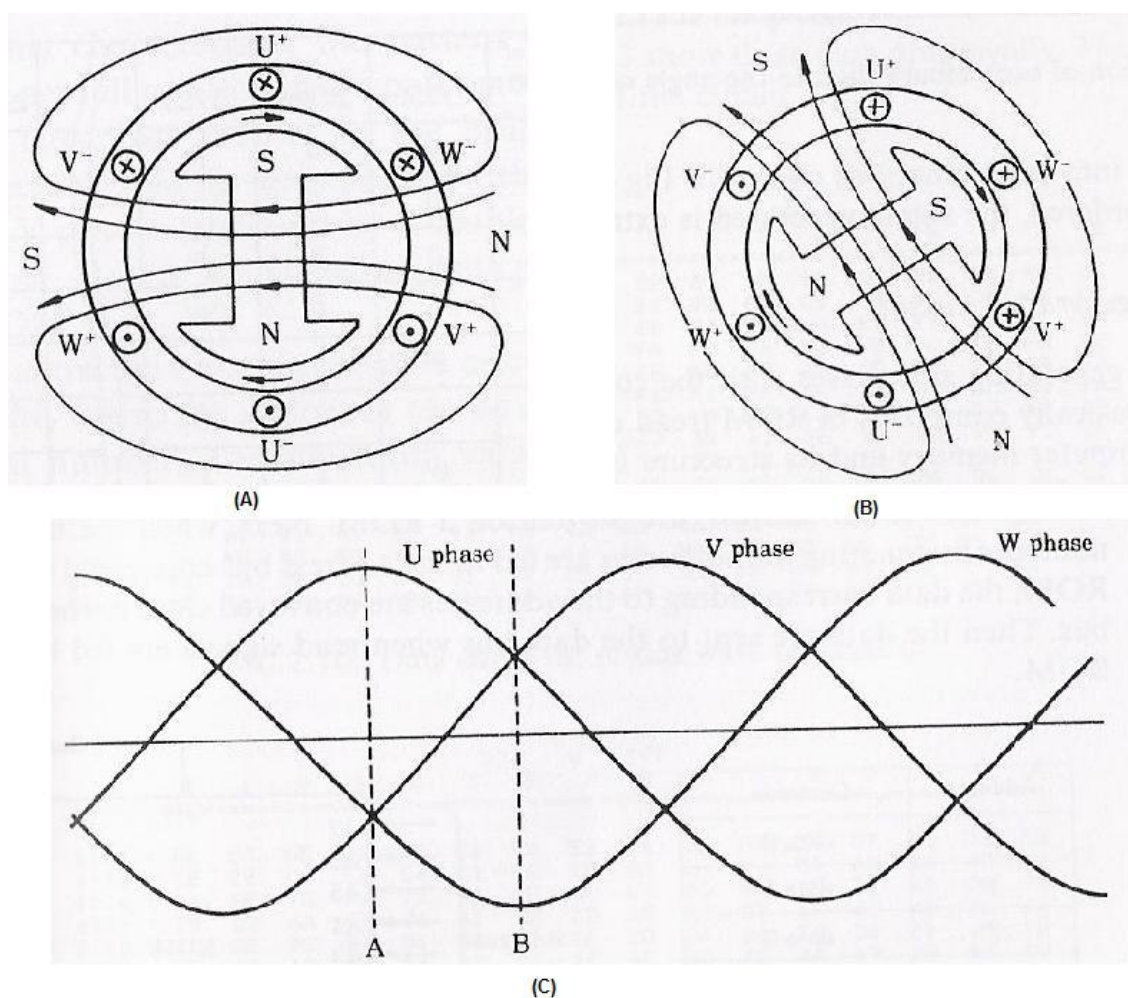


Figura 1 - Funcionamento dos campos girantes (DOTE; KINOSHITA, 1990)

A grande diferença entre o motor de imã permanente e os motores de corrente alterada mais comuns é o controle preciso de posição, velocidade ou torque do primeiro. Esse controle é feito por meio de um sistema eletrônico com

realimentação, sendo a tensão de alimentação (ou a corrente) a variável de controle. O controle de velocidade é feito através da corrente ou tensão aplicadas, o controle de posição pelo posicionamento angular dos campos girantes e o de torque através do controle de corrente. Tais controles só são possíveis graças a desenvolvimentos relativamente recentes na área de eletrônica de potência, com a redução de custos de MOSFET's, IGBT's e outros transistores de alta potência.

3.2. Modelagem Matemática

Para a realização do projeto do controlador do motor é necessário a derivação de seu modelo físico. Esta derivação será feita de forma geral para um motor trifásico normal e depois será adaptada para o modelo de um motor de imã permanente. É considerado um motor trifásico ideal, com as seguintes características:

- A distância entre o rotor e o estator é constante;
- O circuito magnético é linear;
- O enrolamento do estator é montado de forma a gerar tensão induzida senoidal;
- O enrolamento do rotor também é montado de forma a gerar uma tensão senoidal que tem o mesmo número de pólos que a quantidade de fases que o enrolamento do estator;
- A tensão senoidal aplicada no estator é trifásica e simétrica;
- As cargas no motor são torque constante, força de atrito viscosa e inércia;

A Figura 2 ilustra o motor trifásico ideal.

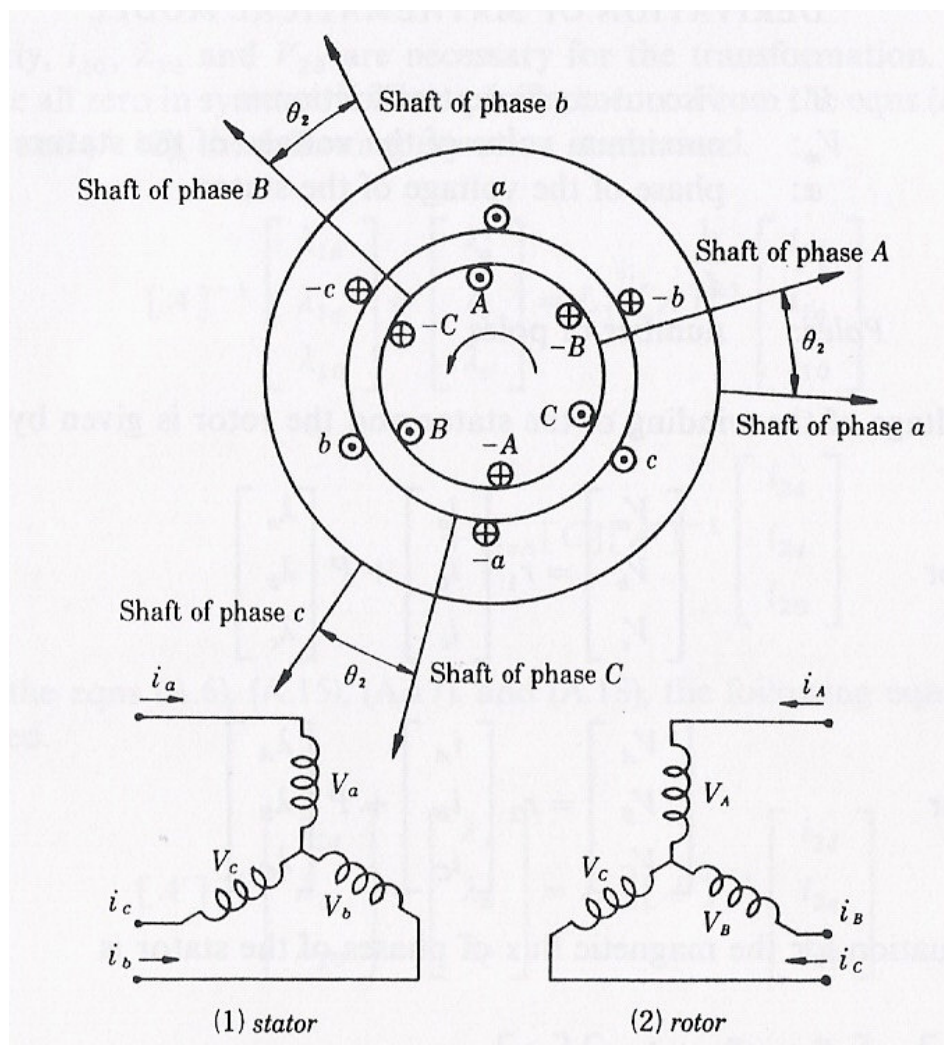


Figura 2 - Estrutura do motor trifásico ideal (DOTE; KINOSHITA, 1990)

As tensões dos enrolamentos do estator são dadas por:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Onde

V_a, V_b, V_c são as tensões instantâneas nas fases a, b e c do estator;

i_a, i_b, i_c são as correntes instantâneas nas fases a, b e c do estator;

$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ são o fluxo magnético instantâneo nas fases a, b e c do estator.

As tensões dos enrolamentos do rotor são:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Onde

V_A, V_B, V_C são as tensões instantâneas nas fases a, b e c do estator;

i_A, i_B, i_C são as correntes instantâneas nas fases a, b e c do estator;

$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ são o fluxo magnético instantâneo nas fases a, b e c do estator.

A equação para o fluxo magnético para as fases do estator é

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{ab} & L_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + L_{aA} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Onde

$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc}$ são as auto indutâncias das fases a, b e c do estator;

$L_{ab} = L_{bc} = L_{ca}$ são as indutâncias mútua das fases do estator;

$L_{aA} = L_{bB} = L_{cC}$ são as indutâncias mútua entre o estator e o rotor;

θ_2 é a diferença angular entre o rotor e o estator.

Para o fluxo magnético no rotor, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AB} \\ L_{AB} & L_{AA} & L_{AB} \\ L_{AB} & L_{AB} & L_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Onde

$L_{AA} = L_{BB} = L_{CC}$ são as auto indutâncias das fases a, b e c do rotor;

$L_{AB} = L_{BC} = L_{CA}$ são as indutâncias mútua das fases do rotor.

Da lei de Kirchhoff tem-se:

$$i_a + i_b + i_c = 0$$

$$i_A + i_B + i_C = 0$$

(3.5)

Manipulando-se as equações (3.5), (3.4) e (3.3) obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = (L_{aa} - L_{ab}) \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} +$$

$$L_{aA} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = (L_{AA} - L_{AB}) \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} +$$

$$L_{aA} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O sistema de corrente alternada pode ser transformado para um modelo de corrente contínua que possui eixos fictícios chamados de *direto* e *quadratura* (*d* e *q*), que rodam sincronizados com a corrente alternada. O eixo direto na verdade se refere à orientação do fluxo magnético gerado pelo enrolamento, e o eixo em quadratura está defasado de 90° com essa orientação. Com essa transformação, todas as tensões e correntes podem ser resolvidas no eixo direto e quadratura (FITZGERALD; KINGSLEY; UMANS, 1990). Para obter a transformação, projetam-se os fasores a, b e c em eixos perpendiculares entre si que giram sincronizados com a rotação ω . Esta é a chamada transformação *dq* ou de Park. Obtém-se assim a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Onde

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \cos(\omega t - 120^\circ) & \cos(\omega t + 120^\circ) \\ -\sin \omega t & -\sin(\omega t - 120^\circ) & -\sin(\omega t + 120^\circ) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 1 \\ \cos(\omega t - 120^\circ) & -\sin(\omega t - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\omega t + 120^\circ) & -\sin(\omega t + 120^\circ) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A matriz inversa A^{-1} é necessária para transformar as variáveis de controle de volta às variáveis físicas de fase a, b e c do motor.

Nas outras variáveis, a transformação dq será:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e

$$\begin{bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \\ V_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Os subscritos $1d$ e $1q$ referem-se às variáveis no sistema de coordenadas girantes dq para o estator. As variáveis i_{10} , V_{10} e λ_{10} são necessárias para a transformação de forma que a matriz A seja inversível, mas têm valor zero em motores trifásicos simétricos (DOTE; KINOSHITA, 1990).

As variáveis do rotor são transformadas da mesma maneira. Os eixos q e d rodam em sincronia com ω_2 , a velocidade angular do rotor. Suponha que o rotor tem um escorregamento s e que o eixo d do rotor está adiantado em relação ao eixo q , então:

$$\frac{d}{dt}\theta_s = s\omega_2 \quad (3.12)$$

onde θ_s é o ângulo do rotor para com o eixo d . Assim,

$$\begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Com

$$\mathbf{A}' = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_s & \cos(\theta_s - 120^\circ) & \cos(\theta_s + 120^\circ) \\ -\sin \theta_s & -\sin(\theta_s - 120^\circ) & -\sin(\theta_s + 120^\circ) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

E a matriz inversa, necessária para a transformação de fases do eixo dq para as fases A, B e C é

$$\mathbf{A}'^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s & 1 \\ \cos(\theta_s - 120^\circ) & -\sin(\theta_s - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\theta_s + 120^\circ) & -\sin(\theta_s + 120^\circ) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

De maneira similar:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{2d} \\ \lambda_{2q} \\ \lambda_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e

$$\begin{bmatrix} V_{2d} \\ V_{2q} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Como anteriormente, os subscritos $2d$ e $2q$ referem-se às variáveis no sistema de coordenadas girantes dq para o rotor e as variáveis i_{20} , V_{20} e λ_{20} são necessárias para que a transformação seja inversível, mas têm valor zero em um motor simétrico. Das equações (3.6), (3.7), (3.9) e (3.10) obtém-se

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = (L_{aa} - L_{ab}) \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} +$$

$$L_{aA} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Das equações (3.6), (3.13), (3.15) e (3.16) tem-se:

$$\mathbf{A}'^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{2d} \\ \lambda_{2q} \\ \lambda_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = (L_{AA} - L_{AB}) \mathbf{A}'^{-1} \begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} +$$

$$L_{aA} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 & \cos(\theta_2 - 120^\circ) \\ \cos(\theta_2 - 120^\circ) & \cos(\theta_2 + 120^\circ) & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \mathbf{A}'^{-1} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Onde

$$\theta_2 = \omega t - \theta_s \quad (3.20)$$

$$L_{11} = (L_{aa} - L_{ab}) \quad (3.21)$$

$$L_{22} = (L_{AA} - L_{AB}) \quad (3.22)$$

Utilizando relações trigonométricas, simplificam-se as equações 3.18 e 3.19

para

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} = L_{11} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} + L_{12} \begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{2d} \\ \lambda_{2q} \\ \lambda_{20} \end{bmatrix} = L_{22} \begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} + L_{12} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde $L_{12} = 3/2 L_{aA}$.

Das equações (3.1), (3.7) e (3.13), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \\ V_{10} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \mathbf{A} r_1 \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \mathbf{A} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = r_1 \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} \\
 &= r_1 \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \left(-\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} \right) \\
 &= r_1 \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{10} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \\ \lambda_{10} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

De maneira similar, das equações (3.2), (3.13), (3.18) e (3.19) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} V_{2d} \\ V_{2q} \\ V_{20} \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{20} \end{bmatrix} + A' \dot{A}'^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{2d} \\ \lambda_{2q} \\ \lambda_{20} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{2d} \\ \lambda_{2q} \\ \lambda_{20} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Calculando $\mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^{-1}$ e $A' \dot{A}'^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{1d} \\ \lambda_{1q} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\lambda_{1q} \\ \lambda_{1d} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Substituindo as equações (3.23) e (3.24) em (3.27) e (3.28), e usando a equação (3.12) tem-se:

$$\begin{bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \\ V_{2d} \\ V_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{d}{dt}L_{11} & -\omega L_{11} & \frac{d}{dt}L_{12} & -\omega L_{12} \\ \omega L_{11} & r_1 + \frac{d}{dt}L_{11} & \omega L_{12} & \frac{d}{dt}L_{12} \\ \frac{d}{dt}L_{12} & -s\omega L_{12} & r_2 + \frac{d}{dt}L_{22} & -s\omega L_{22} \\ s\omega L_{12} & \frac{d}{dt}L_{12} & s\omega L_{22} & r_2 + \frac{d}{dt}L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{2d} \\ i_{2q} \end{bmatrix}$$

(3.29)

O torque eletromagnético é calculado pela divisão da potência pela velocidade de rotação. Observa-se que $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = 2/3 (\mathbf{I})$. Como a potência depois da transformação dq se mantém, tem-se:

$$P = \frac{3}{2} (V_{2d} i_{2d} + V_{2q} i_{2q}) = \frac{3}{2} [-\lambda_{2q} i_{2d} (s\omega) + \lambda_{2d} i_{2q} (s\omega)]$$

(3.30)

A velocidade do rotor é $(s\omega) \frac{2}{n}$. Assim, o torque elétrico será:

$$T = \frac{3n}{2} (\lambda_{2q} i_{2d} - \lambda_{2d} i_{2q}) = \frac{3}{4} n L_{12} (i_{1q} i_{2d} - i_{1d} i_{2q})$$

(3.31)

O torque requerido no sistema mecânico é:

$$T = J \dot{\omega}_2 + B \omega_2 + T_l$$

(3.32)

Para o caso específico de um motor de ímã permanente, inverte-se o sinal de ω nas equações (3.29) e (3.30). Assim, há um adiantamento no eixo q de 180° , mudando os sinais de V_{1q} e i_{1q} :

$$\begin{bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \\ V_{2d} \\ V_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{d}{dt}L_{11} & \omega L_{11} & \frac{d}{dt}L_{12} & \omega L_{12} \\ -\omega L_{11} & r_1 + \frac{d}{dt}L_{11} & -\omega L_{12} & \frac{d}{dt}L_{12} \\ \frac{d}{dt}L_{12} & s\omega L_{12} & r_2 + \frac{d}{dt}L_{22} & s\omega L_{22} \\ -s\omega L_{12} & \frac{d}{dt}L_{12} & -s\omega L_{22} & r_2 + \frac{d}{dt}L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{1q} \\ i_{2d} \\ i_{2q} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Além disso, substitui-se $V_{1d} = v_d$, $V_{1q} = v_q$, $i_{1q} = i_q$, $i_{1d} = i_d$, $r_1 = R_a$, $L_{11} = L_a$, $\omega = \omega_m$, $i_{2d} = 0$ e $i_{2q} = \Phi$ nas equações 3.33 e 3.31 (DOTE; KINOSHITA, 1990):

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + \frac{d}{dt}L_a & -\omega_m L_a \\ \omega_m L_a & R_a + \frac{d}{dt}L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m \Phi \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

O torque instantâneo T_e é:

$$T_e = \frac{3}{4}n\Phi i_d = J\dot{\omega}_m + B\omega_m + T_l \quad (3.35)$$

Outra forma de se escrever o torque elétrico, dada por PILLAY e KRISHNAN (1988) é dada por

$$T_e = \frac{3}{2}n[\lambda_{af}i_q + (L_d - L_q)i_q i_d] \quad (3.36)$$

Onde

L_d , L_q são as indutâncias fictícias dos enrolamentos em q e d ;

λ_{af} é o fluxo magnético.

Para efeitos práticos, utilizamos a relação $\lambda_{af} = k_v$ e $\frac{3}{2}n\lambda_{af} = k_t$. As variáveis

L_d e L_q são praticamente iguais a L_a tanto em regime permanente quanto durante a variação dinâmica do motor (MARTINS, 2003), e assim sendo, o torque elétrico do motor se torna:

$$T_e = k_t \cdot i_q \quad (3.37)$$

Na forma de equações de espaço de estado, obtemos o seguinte sistema:

$$\dot{i}_d = (v_d - Ri_d + \omega_m Li_q)/L \quad (3.38)$$

$$\dot{i}_q = (v_q - Ri_q + \omega_m Li_d - \omega_m k_v)/L \quad (3.39)$$

$$\dot{\omega}_m = (k_t i_q - B\omega_m + T_l)/J \quad (3.40)$$

$$\dot{\theta} = \omega_m \quad (3.41)$$

A figura 3 representa a planta do motor representada em diagrama de blocos.

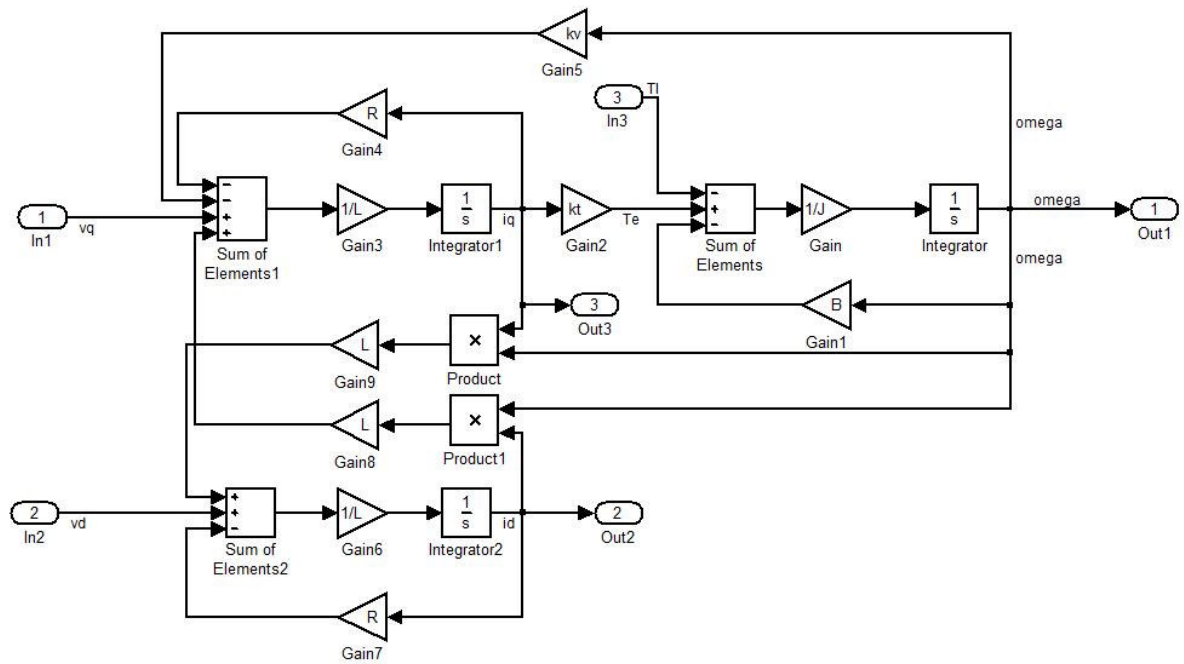


Figura 3 - Diagrama de blocos do motor sem escovas

Como se pode observar, adotando-se como variáveis de estado i_d , i_q , ω_m e θ , têm-se equações com termos cruzados de estado, caracterizando um sistema não-linear. Para que seja possível o projeto de um controlador, devem-se linearizar as equações em torno de pontos de operação.

Sejam

$$\omega_m = \omega_{m0} + \delta\omega_m$$

$$i_d = i_{d0} + \delta i_d$$

$$i_q = i_{q0} + \delta i_q$$

$$v_d = v_{d0} + \delta v_d$$

$$v_q = v_{q0} + \delta v_q$$

(3.42)

Onde as variáveis acompanhadas por δ representam pequenas variações e as variáveis de subscrito 0 são pontos de operação.

Substituindo as relações dadas por 3.42 nas equações de estado, cancelando termos de segunda ordem e considerando que em regime estacionário as derivadas dos estados em relação ao tempo têm valor zero, obtêm-se as seguintes equações de estado linearizadas:

$$\delta \dot{i}_d = (\delta v_d - R\delta i_d + \omega_{m0}L\delta i_q + \delta\omega_m Li_{q0})/L \quad (3.43)$$

$$\delta \dot{i}_q = (\delta v_q - R\delta i_q + \omega_{m0}L\delta i_d + \delta\omega_m Li_{d0} - \delta\omega_m k_v)/L \quad (3.44)$$

$$\delta \dot{\omega}_m = (k_t\delta i_q - B\delta\omega_m + \delta T_l)/J \quad (3.45)$$

$$\delta \dot{\theta} = \delta\omega_m \quad (3.46)$$

Os pontos de operação estacionários são definidos para as equações de estado iniciais quando a derivada de seus estados é igual a zero:

$$v_{d0} - Ri_{d0} + \omega_{m0}Li_{q0} = 0 \quad (3.47)$$

$$v_{q0} - Ri_{q0} + \omega_{m0}Li_{d0} - \omega_{m0}k_v = 0 \quad (3.48)$$

$$k_t i_{q0} - B\omega_{m0} + T_{l0} = 0 \quad (3.49)$$

Além dessa condição, controla-se a corrente i_{d0} para que o fluxo seja constante e o torque seja máximo, definido apenas pela corrente i_q (PILLAY & KRISHNAN, 1988). Nesse controle, $i_{d0} = 0$ para todas as condições de trabalho:

$$v_{d0} = -\omega_{m0} L i_{q0} \quad (3.50)$$

$$v_{q0} = R i_{q0} + \omega_{m0} k_v \quad (3.51)$$

$$k_t i_{q0} - B \omega_{m0} + T_{l0} = 0 \quad (3.52)$$

Utilizando-se $T_{l0} = 0$, temos as seguintes relações:

$$\omega_{m0} = \frac{k_t}{(BR + k_t k_v)} v_{q0} = v_{q0} k_\omega \quad (3.53)$$

E

$$i_{q0} = \frac{k_t}{(BR + k_t k_v)} v_{q0} = v_{q0} k_i \quad (3.54)$$

Onde k_ω e k_i são constantes de ganho definidas para determinação dos pontos de operação.

3.3. Sistema em tempo discreto

A representação demonstrada anteriormente é feita no tempo contínuo e deve ser discretizada, para que o projeto do controlador seja feito em tempo discreto.

Equações de estado representadas por

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

com x sendo o vetor de estados, u sendo o vetor de entrada, y o vetor de saída e $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ matrizes de estado, entrada, saída e transmissão direta, respectivamente, podem ser discretizadas para a forma

$$x(k + 1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

Onde

$\mathbf{G}$ é a matriz de estados discretizada;

$\mathbf{H}$ é a matriz de entrada discretizada.

Entretanto, para obter as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ do espaço discretizado, utilizam-se as seguintes relações (OGATA, 1995):

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T_a} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{H} = \left(\int_0^{T_a} e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} \quad (3.56)$$

Claramente, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ dependem do período de amostragem, T_a , além das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Para a solução numérica de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, pode-se utilizar o comando do Matlab $[\mathbf{G}, \mathbf{H}] = \text{c2d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, T_a)$. Para a solução analítica, entre vários métodos pode-se utilizar a seguinte fórmula (OGATA, 2003):

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T_a} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}T_a}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T_a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 T_a} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.57)$$

A matriz $\mathbf{P}$ é a que matriz dos autovetores da direita da matriz $\mathbf{A}$, e λ_1 , λ_2 e λ_3 são os autovalores de $\mathbf{A}$.

Da mesma forma, calcula-se $\mathbf{H}$ integrando-se $e^{\mathbf{A}t}$ e multiplicando seu resultado por $\mathbf{B}$.

É importante lembrar que normalmente os valores das constantes dos motores estão disponíveis em catálogo, mas eventualmente não é possível obtê-los, sendo necessário um ensaio do motor para determiná-las.

3.4. Acionamento

Como explicado anteriormente, o acionamento do motor pode ser feito por correntes senoidais trifásicas. Entretanto, como o objetivo é servo controle preciso não se pode alimentá-lo diretamente pela rede. A tensão de alimentação deve ser inicialmente retificada por um circuito conversor e posteriormente chaveada pelo circuito de controle.

O circuito de controle gerará, em baixa potência, as formas de onda necessárias. Isso pode ser feito através do uso de memórias ou por um processador. Para que haja uma rápida atuação, o ideal é que, mesmo no processador, as formas de onda das fases u, v e w sejam tabeladas, não sendo necessários cálculos de funções trigonométricas durante a tarefa de controle.

Os transistores de potência não são chaveados diretamente pelas formas de onda geradas, isso implicaria o uso de transistores de potência na região proporcional, o que não é indicado, uma vez que isso aumenta a temperatura devido à perda de potência. Essa perda é reduzida se, ao invés de se trabalhar na região proporcional, chavear-se o transistor de potência, utilizando PWM's (Pulse Width Modulation).

Nessa estratégia de chaveamento, a corrente do motor é convertida em pulsos controlados com largura proporcional à amplitude da senóide da corrente. Assim, a média da corrente do pulso modulado será igual à senóide. Isso é conseguido ao se comparar uma onda triangular de frequência mais alta que a senóide de controle, gerando pulsos quando a amplitude do seno é maior que a da

onda triangular. A Figura 4 ilustra esse mecanismo. Uma variável importante é a escolha da frequência da onda triangular. Uma frequência muito alta aumenta as perdas de potência; se escolhida muito baixa, aumentam as variações de torque e perdas no núcleo devido a “ripples”. No geral, escolhem-se frequências de 1 a 3 kHz quando o inversor é constituído de transistores bipolares e de 5 a 20 kHz quando é feito com FET's.

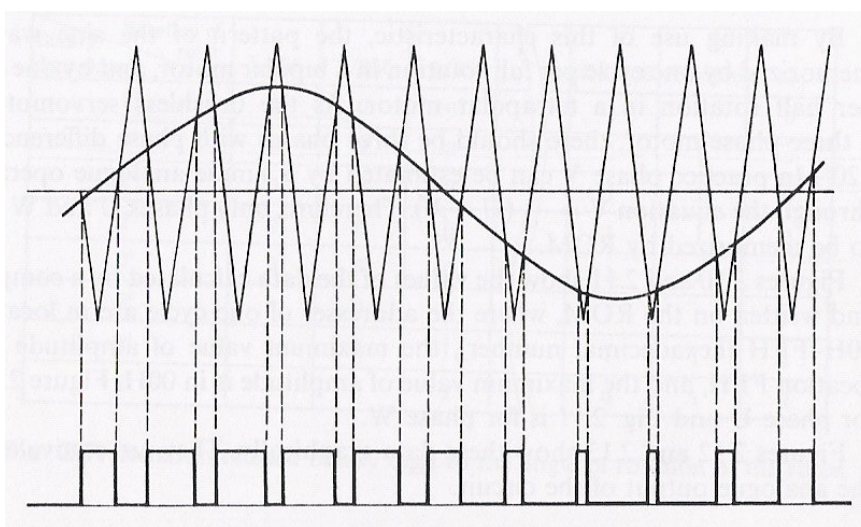


Figura 4 - Geração da PWM (DOTE; KINOSHITA, 1990)

Os transistores de potência devem ser montados na forma de ponte, sendo dois pra cada fase, como ilustra a figura 5. Um dos requisitos mais importante para tais componentes, além de serem capazes de suportar grandes correntes com baixa perda de potência, deve ser a rápida velocidade de chaveamento.

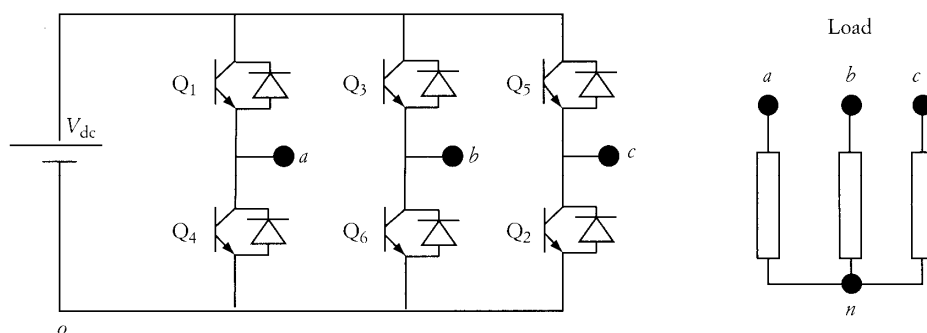


Figura 5 - Ponte Inversora Trifásica (El-Sharkawi, 2000)

3.5. Sensoriamento

O controle de um motor sem escovas deve ter realimentação para o correto chaveamento. Dessa forma, a escolha de sensores apropriados deve ser feita. Grande parte dos motores sem escovas comerciais atualmente possui um encoder ótico incremental como sensor, sendo menos comum o uso de encoders absolutos. O uso de memórias permanentes tipo flash diminui a necessidade de uso de tais dispositivos. Além dos sensores de posição, necessários para controle de posicionamento e velocidade, um sensor de corrente também deve ser utilizado.

No encoder ótico, um LED (Light-Emitting Diode) serve de fonte de luz (normalmente infravermelha) enquanto um foto-transistor a recebe. Entre os dois coloca-se um disco com fendas que roda junto com o rotor (ou com qualquer centro de rotação cuja posição angular se quer medir). A cada vez que essas fendas permitem ou não a passagem de luz do LED para o transistor, gera-se um pulso, que pode ser contado. O sensor incremental permite contar apenas o número de pulsos gerado diretamente através do número de fendas. Um segundo emissor/detector, defasados dos primeiros de 90° em relação às fendas, permite que o sentido de rotação do rotor seja definido. A figura 6 ilustra um sensor ótico e seu funcionamento. Obviamente, a precisão desse sensor está relacionada diretamente com o número de fendas do disco.

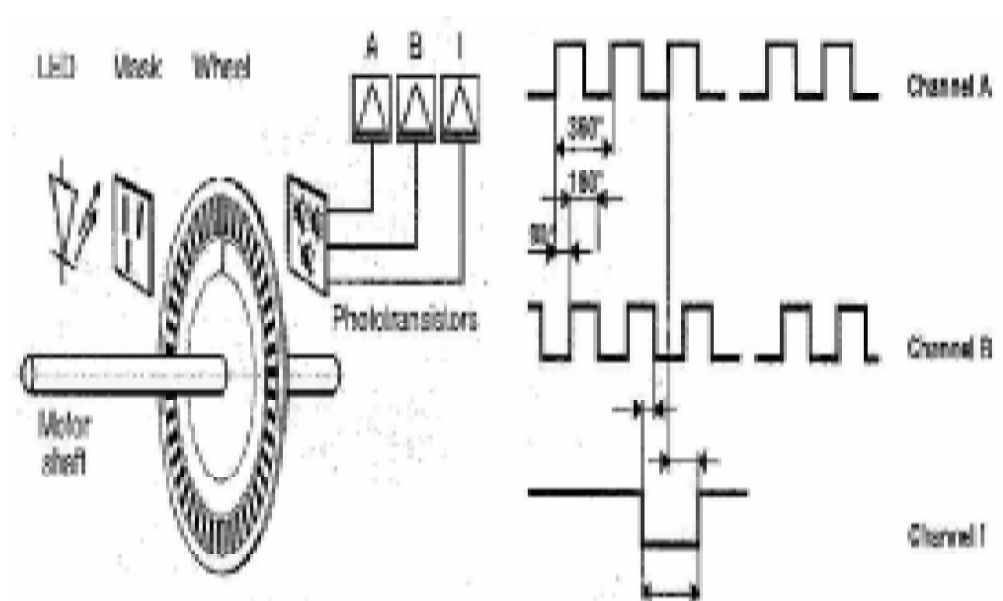


Figura 6 - Funcionamento do Encoder óptico

Encoders óticos incrementais necessitam de circuitos adicionais para a contagem de pulsos, os chamados detectores de quadratura. Esse circuito é responsável por decodificar a contagem dos pulsos gerados (em ambos os sentidos) e transformá-los em uma saída digital, que indica o número da contagem.

Diferentemente do sensor incremental, o encoder absoluto possui trilhas que representam bits. Essas trilhas estão dispostas de forma a contar os bits acionados na medida em que o disco gira. É importante lembrar que a contagem não é o código binário normal e sim em código Grey. Isso porque tal construção permite redução da sensibilidade à vibrações, já que no código Grey a contagem muda um bit por vez. Uma aparente vantagem do encoder absoluto é o fato de ele informar a

posição do rotor a qualquer instante, não dependendo de uma referência, mesmo quando a máquina é ligada ou quando ocorre uma queda de energia. Entretanto, como explicitado anteriormente, essa funcionalidade é facilmente substituída com o uso de memórias fixas, como flash, que podem guardar valores de posição, não sendo necessário referenciar o eixo de rotação novamente.

O princípio de encoders magnéticos é parecido com o dos óticos, sendo que, ao invés de um disco com fendas e foto-sensores, têm-se um tambor magnetizado e uma resistência magnética. Já os resolvers funcionam como LVDT's, onde a posição angular é detectada pela tensão de saída de transformadores montados num rotor e num estator.

3.6. Freio Eletromagnético

Muitos motores sem escovas possuem embutidos freios eletromagnéticos para manter a posição. Isso é especialmente necessário quando os motores são usados em juntas de rotação de robôs e outros tipos de máquinas de posicionamento. Para que não se mantenha energizado o motor travado e aplicando torque, aciona-se um freio. Este freio tem acionamento invertido (é normalmente fechado) como segurança. O funcionamento dele é bem simples, sendo um disco externo mantido friccionado contra um disco interno ligado ao rotor através de molas. Uma bobina puxa o disco quando acionada, liberando o rotor para girar livremente. Normalmente toda essa estrutura está encapsulada junto com o motor. Um circuito de potência deve ser associado à bobina, para amplificar o sinal lógico de ativação do freio que vem do processador.

4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

4.1. Tipo de Controlador

O controlador do motor, a ser implantado no microcontrolador, é uma equação que relaciona valores de referência com valores que devem servir de entrada para a planta, de forma que o sistema todo reaja como esperado. Num servo motor sem escovas que requer precisão de posicionamento, velocidade ou torque, o sistema de controle deve ser de malha fechada. Em um sistema com realimentação, o sinal de erro atuante, que é a diferença entre o sinal de referência e o sinal de realimentação (que pode ser o próprio sinal de saída ou uma função do sinal de saída e suas derivadas e/ou integrais), realimenta o controlador. O controlador age de forma a minimizar o erro e ajustar a saída do sistema ao valor desejado (OGATA, 2003). Por isso, o sistema de controle requer, além do próprio controlador, sensores de corrente, posição e velocidade angular.

Por ser simples, ter um projeto relativamente fácil de desenvolver e atender características de desempenho, os controladores PI e PID associados à técnica de “desacoplamento” das fases A, B e C em fases direta e em quadratura com o fluxo (o chamado Controle Vetorial) são os mais utilizados nos acionadores comerciais. Na forma de controle clássica, mais usada na indústria e mais abordada em livros e artigos, utilizam-se controladores PI numa malha interna de controle das correntes do motor e, numa malha externa, realiza-se o servo-controle de posição ou velocidade. O controle de torque só necessita da referência da corrente, uma vez que este é relacionado diretamente à variável i_q pela constante k_t . A figura 7 ilustra a arquitetura clássica para controle de motores.

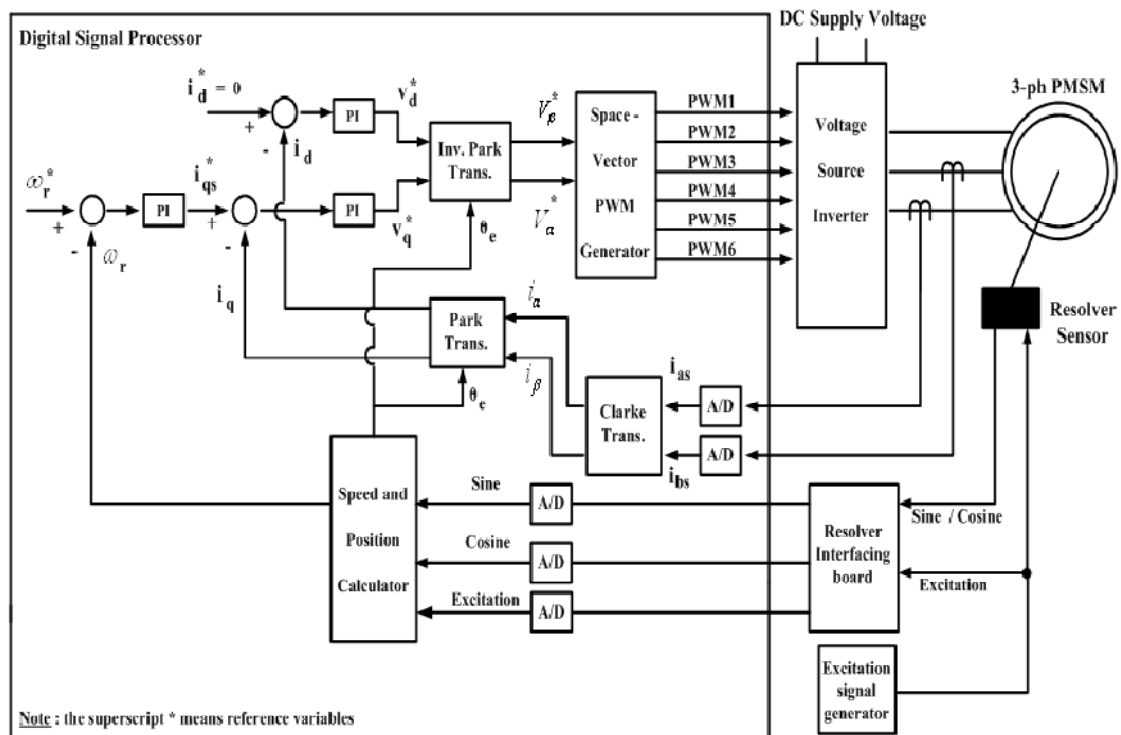


Figura 7 - Controle vetorial de um motor de imã permanente sem escovas usando controladores PI (KAWEJINDA, KONGHIRUN, 2007)

O sistema de controle aqui proposto faz o controle do motor sem escovas através da realimentação dos estados do sistema. Apesar de ser um método menos difundido na indústria, garante melhor desempenho da planta. Uma abordagem mais profunda do projeto do controlador por realimentação de estados é dada mais adiante, com devidas adaptações para a planta do motor sem escovas.

O usuário deverá projetar o controlador de acordo com os critérios de desempenho desejados para sua aplicação e as constantes do motor que usará, e em seguida configurar o controlador para que trabalhe com tais constantes. Ressalta-se aqui que o período de amostragem também é uma variável de projeto, e deve ser escolhido com cautela. O projeto do controlador pode ser feito de diversas formas, como por alocação de pólos ou através de otimização linear quadrática.

4.2. Variáveis de Projeto

Antes de se projetar o controlador alguns parâmetros de resposta do sistema devem ser escolhidos com cautela, como, por exemplo, o período de amostragem. Esses parâmetros dependem da aplicação do servo sistema e, matematicamente, definem em que região devem se localizar os pólos do sistema. Não há uma fórmula específica para a escolha cada um, ou seja, devem ser escolhidos com bom senso. Entre os fatores limitantes estão a saturação de entrada e saída do controlador e a saturação do amplificador de potência. Ogata (2003, p. 188) define especificações de resposta transitória como sendo as mais comuns. Entre essas especificações, têm-se:

- a) Tempo de atraso t_d : Tempo necessário para que a resposta atinja metade de seu valor estacionário pela primeira vez.
- b) Tempo de subida t_r : Tempo necessário para que a resposta passe de 10% a 90% de seu valor final, ou de 5% a 95% de seu valor final, ou de 0% a 100% de seu valor final.
- c) Tempo de pico t_p : Tempo para que a resposta atinja o primeiro tempo de pico de sobre-sinal
- d) Máximo sobre-sinal, M_p : É o valor máximo, em porcentagem, do pico da curva de resposta e medido a partir da unidade.

É importante ressaltar que a escolha de um baixo sobre-sinal e um baixo tempo de subida são conflitantes e há aqui uma solução de compromisso. A figura 8 ilustra a curva de resposta com os principais parâmetros indicados.

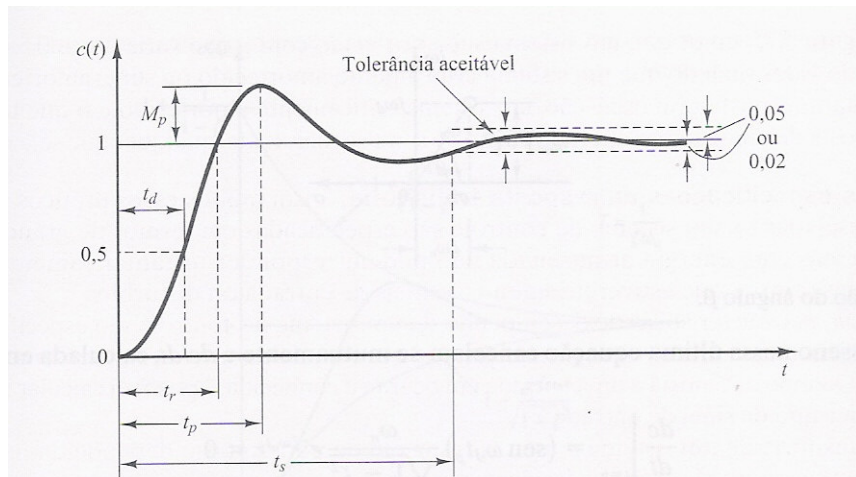


Figura 8 - Requisitos de projeto (OGATA,2003)

Outro critério de projeto importante é o erro estacionário. Sistemas de controle com PI's e PID's garantem erro estacionário zero para este sistema sem integradores, e o servo-controle projetado pelo método adiante também o faz, ao se adicionarem integradores à planta.

Por fim, o período de amostragem T_a deve ser escolhido apropriadamente. Se T_a não atende ao teorema da amostragem, poderá ocorrer distorção do sinal. Se, pelo contrário, T_a for muito pequeno, o microcontrolador ficará sobrecarregado e introduzirá distorções na reconstrução do sinal. Normalmente, faz-se com que $T_a = \ln^2/p$, com p entre 0,95 e 0,99.

Para o controle no espaço de estados é possível adotar um critério chamado "Deadbeat Response", onde os pólos da equação da malha fechada em tempo discreto são alocados em zero. Isso significa que os tempos de resposta do sistema para uma entrada na forma de degrau se tornam os menores possíveis, chegando ao estado estacionário em quase n períodos de amostragem, onde n é a ordem do sistema. Nota-se que isso requer grande esforço do controle, fazendo com que o sistema sature facilmente.

Outros métodos de escolha dos pólos envolvem alocação de pólos de acordo com padrões Bessel ou ITAE (a tabela 1 ilustra um sistema padrão Bessel para alocação de pólos). Estes métodos possuem boas características de sobre-sinal (padrão Bessel, que, entretanto apresentam resposta um pouco mais lenta) ou desempenho de tempo de subida (padrão ITAE, que são pouco amortecidos e apresentam sobre-sinal). Entretanto, ao se alocar os pólos de acordo com tais padrões, o esforço de controle é ignorado, podendo ocorrer saturação. Além disso, não há garantia da robustez da malha fechada e nem do desempenho do sistema, que podem ser alterados por erros de modelagem e pela presença de zeros no sistema.

Tabela 1 - Sistemas padrão Bessel para tempo de assentamento de 1s

Ordem	Localização dos pólos no plano s
1	$-4,6200$
2	$-4,0530 \pm 2,34j$
3	$-5,0093, -3,9668 \pm 3,7845j$
4	$-4,0156 \pm 5,0723j, -5,5262 \pm 1,6553j$
5	$-6,4480, -4,1104 \pm 6,3142j, -5,9268 \pm 3,0813j$
6	$-4,2169 \pm 7,5300j, -6,2613 \pm 4,4018j, -7,1205 \pm 1,4540j$
7	$-8,0271, -4,3361 \pm 8,7519j, -6,5714 \pm 5,6786j, -7,6824 \pm 2,8081j$
8	$-4,4554 \pm 9,9715j, -6,8554 \pm 6,9278j, -8,1682 \pm 4,1057j, -8,7693 \pm 1,3616j$

Para alocarem-se os pólos em sistemas padrão Bessel, escolhe-se um tempo de assentamento desejado e dividem-se os pólos correspondentes à ordem do sistema pelo t_a especificado. A presença de zeros no sistema pode alterar bastante a resposta do sistema em malha fechada.

4.3. Controle integral por realimentação de estados

Para realizar-se o controle de sistemas servos, primeiramente deve-se redefinir o vetor de estados para que as saídas do sistema sejam os primeiros estados. Assim, para controle de velocidade, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{i}_d \\ \delta \dot{\omega}_m \\ \delta \dot{i}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & i_{q0} & \omega_{m0} \\ 0 & -B/J & k_t/J \\ \omega_{m0} & -k_v/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_d \\ \delta \omega_m \\ \delta i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_d \\ \delta v_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_d \\ \delta \omega_m \\ \delta i_q \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Para controle de posição, o sistema será:

$$\begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta \dot{i}_d \\ \delta \dot{\omega}_m \\ \delta \dot{i}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -R/L & i_{q0} & \omega_{m0} \\ 0 & 0 & -B/J & k_t/J \\ 0 & \omega_{m0} & -k_v/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta i_d \\ \delta \omega_m \\ \delta i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/L & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_d \\ \delta v_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta i_d \\ \delta \omega_m \\ \delta i_q \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

No controle de torque, através da corrente i_q , o sistema será:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{i}_d \\ \delta \dot{i}_q \\ \delta \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & \omega_{m0} & i_{q0} \\ \omega_{m0} & -R/L & -k_v/L \\ 0 & k_t/J & -B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_d \\ \delta i_q \\ \delta \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 1/L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_d \\ \delta v_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_d \\ \delta i_q \\ \delta \omega_m \end{bmatrix}$$

(4.3)

Observa-se que todas as matrizes dependem dos pontos de operação, i_{q0} e ω_{m0} (i_{q0} será sempre mantida em zero, como explicado anteriormente). O projeto do controlador deverá levar isso em consideração, de forma que, para cada ponto de operação, um sistema de controle deve ser projetado.

Considerando já obtidas as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ que relacionam as variáveis de estado $\delta\theta$, $\delta\omega_m$, δi_d , δi_q e as entradas δv_d e δv_q , têm-se então a seguinte equação de estados em tempo discreto:

$$x(k+1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

O sistema deve ser controlável, e para isso, observa-se que o posto de $[\mathbf{H}; \mathbf{G}\mathbf{H}; \dots; \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$ deve ser igual a n , ou seja, o número de linhas linearmente independentes dessa matriz. Na maioria dos casos, para o motor descrito, o sistema será controlável.

Para garantir erro estacionário igual a zero, deve-se inserir à planta dois novos estados (para o controle de velocidade e torque), que são integradores das variáveis de saída. Para o controle de posição apenas um novo estado é adicionado, que integra somente a corrente i_d (uma vez que o controle de posição já possui um integrador):

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \delta i_d(t) \\ \delta \omega_m(t) \\ \delta i_q(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \delta i_d(t) \\ \delta \omega_m(t) \\ \delta i_q(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_i} \begin{bmatrix} \delta v_d(t) \\ \delta v_q(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Uma vez redefinidas as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ para $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$, procede-se com o projeto de um regulador de estados (o regulador de estados não é um sistema servo, ele apenas mantém o sistema em uma determinada condição de regime permanente).

No regulador de estados, a lei de controle é:

$$u(t) = -\mathbf{K}x(t) \quad (4.5)$$

Onde $\mathbf{K}$ é uma matriz de ganhos de dimensão $m \times n$, com m sendo a ordem do sistema (no caso do motor, 5) e n o número de entradas (no caso do motor, 2).

A matriz de malha fechada para esse sistema será:

$$\mathbf{A}_{mf} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad (4.6)$$

Em seguida, projeta-se o controlador alocando-se os pólos da matriz de malha fechada por meio da matriz $\mathbf{K}$ (ou otimizando a resposta através do controle linear quadrático). Para se alocar os pólos, pode-se utilizar o método algébrico, no qual se calcula o polinômio característico da matriz de malha fechada e iguala-se ao polinômio gerado pelos pólos desejados. Outros métodos envolvem a fórmula de Ackermann ou o método modal (para sistemas SISO), bastante descritos na literatura.

Como o motor a ser controlado é um sistema MIMO, a matriz de ganhos tem infinitas soluções, pois existem mais elementos desconhecidos do que equações para determiná-la. Para eliminar esses elementos extras, várias abordagens são utilizadas. Em alguns sistemas é possível atribuir valor zero a colunas ou linhas da matriz $\mathbf{K}$, eliminando-se estados ou entradas do controle (os estados ou entradas correspondentes às suas respectivas colunas ou linhas não são necessários para o controle).

No sistema do motor sem escovas, não é possível fazer essa eliminação de linhas ou colunas. O método aqui abordado utiliza o comando `place` do matlab, que procura alocar os pólos de maneira robusta, minimizando a sensibilidade do sistema a alterações nos parâmetros da planta. O controle ótimo linear quadrático é comentado adiante.

Definida a matriz $\mathbf{K}$ para a lei de controle do regulador de estados, introduz-se em seguida o sinal de erro,

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.7)$$

Onde $r(t)$ é o sinal de referência.

Com esse sinal de erro define-se a lei de controle do sistema:

$$u(t) = \mathbf{K}_v v(t) + \mathbf{K}_y e(t) - \mathbf{K}_r x_r(t) \quad (4.8)$$

O subscrito r refere-se aos estados da planta que não são saídas. As matrizes $\mathbf{K}_v$, $\mathbf{K}_y$ e $\mathbf{K}_r$ são definidas a partir da matriz de ganhos $\mathbf{K}$:

$$[\mathbf{K}_v \quad \mathbf{K}_y \quad \mathbf{K}_r] = \mathbf{K} \quad (4.9)$$

O vetor $v(t)$ corresponde à integral do erro:

$$\dot{v}(t) = -e(t) \quad (4.10)$$

4.4. Controlador em tempo discreto

Como o controlador será implementado em tempo discreto, ele deve ser ou discretizado ou projetado diretamente em tempo discreto. Na primeira abordagem, utilizando a nomenclatura adotada para as matrizes, podemos escrever a equação de controle integral para sistemas servo como:

$$u(t) = \mathbf{K}_y r(t) - \mathbf{K}x(t) \quad (4.11)$$

Se tivermos um controlador em tempo discreto da forma:

$$u(k) = \mathbf{K}_y' r(k) - \mathbf{K}'x(k) \quad (4.12)$$

Para obtermos as matrizes de controle discretizadas, $\mathbf{K}_y'$ e $\mathbf{K}'$, utilizamos as seguintes relações:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \frac{T_a}{2} \right] \quad (4.13)$$

E

$$\mathbf{K}_y' = \left(\mathbf{I} - \mathbf{KB} \frac{T_a}{2} \right) \mathbf{K}_y \quad (4.14)$$

A maneira de obtenção dessas transformações, através de expansões numéricas das matrizes e suas integrais, é desenvolvida por Astrom e Wittenmark(1984).

Projetando-se o controlador diretamente em tempo discreto, utilizam-se as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ desenvolvidas anteriormente. Adicionando-se integradores a essas matrizes, obtemos a seguinte estrutura de espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \\ \delta i_d(k+1) \\ \delta \omega_m(k+1) \\ \delta i_q(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & 0 & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ 0 & 0 & G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_i} \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \delta i_d(k) \\ \delta \omega_m(k) \\ \delta i_q(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_i} \begin{bmatrix} \delta v_d(k) \\ \delta v_q(k) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A lei de controle para esse sistema e as expressões para integradores e erro serão:

$$u(k) = \mathbf{K}_v' v(k) + \mathbf{K}_y' e(k) - \mathbf{K}_r' x_r(k) \quad (4.16)$$

$$v(k+1) = v(k) + e(k) \quad (4.17)$$

$$e(k) = y(k) - r(k) \quad (4.18)$$

Com isto, implementa-se o controlador em tempo discreto.

4.5. Controle por ganhos variáveis

Ao se realizar a linearização da planta, definiram-se pontos de operação, nos quais o sistema deve estar para que o controle descrito anteriormente funcione. Entretanto, os pontos de operação em um sistema servo dependem da referência. Dessa forma, os ganhos projetados para o controlador devem também depender dessas referências.

Para o estudo desses ganhos, a abordagem algébrica de alocação de pólos é extremamente trabalhosa, se tornando inviável num sistema de quinta ordem como é a planta do motor com integradores. Procedeu-se então com um estudo da sensibilidade dos ganhos de acordo com diferentes pontos de operação.

Por exemplo, no servo-controle de velocidade, dada uma velocidade máxima de operação, divide-se esse valor para vários pontos e calculamos seus valores de operação de acordo com as fórmulas (3.53) e (3.54). Em seguida, projetam-se ganhos da matriz K para todos esses pontos de operação. Para o caso da velocidade, este estudo demonstrou que apenas os termos k_{14} , k_{15} e k_{28} se alteram. Mais ainda, esses termos variam linearmente com a velocidade de operação, podendo ser relacionados com a entrada através de equações de retas (obtida pelo método dos mínimos quadrados).

Uma vez definidas essas retas, inserem-se ganhos variáveis no sistema de controle, que dependem da referência de velocidade. A figura 9 ilustra o sistema de controle integral por realimentação de estados, em que as matrizes de ganho K_v , K_y e K_r são função da referência.

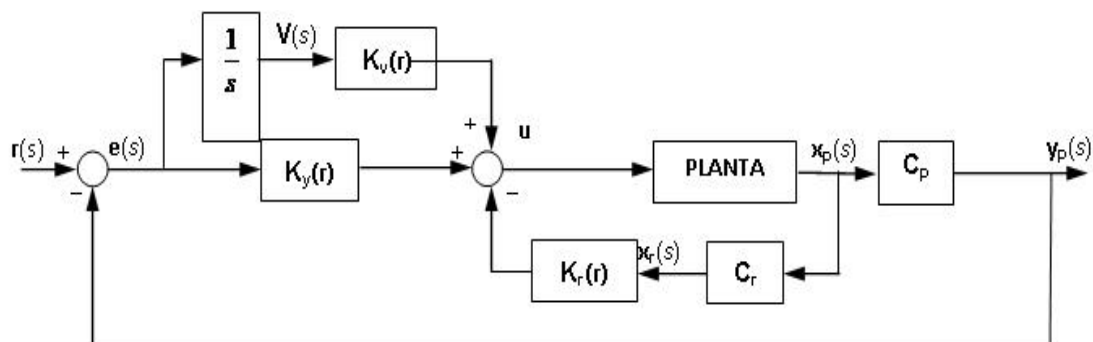


Figura 9 - Diagrama de blocos do sistema

4.6. Projeto por alocação de pólos para o motor de testes utilizando ganhos variáveis

Para simulações foram obtidos valores de algumas características de catálogo de um motor brushless comercial. Os valores de seus parâmetros são dados na tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros de projeto

Atrito B	Inércia J	R	L	kt	kv
0.001	0.009	2,07	0,0142	0,7246	0,2415

No controle de velocidade: Para se escolherem os pólos, um estudo deve ser feito, através de diversas simulações, de forma a fazer com que o sistema responda corretamente.

Utilizando um sistema padrão Bessel de quinta ordem para tempo de assentamento de 1 segundo, as matrizes **K** (obtida através do comando place) serão da forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.6136 & 0.3996 & -1.9045 & k_{14} & k_{15} \\ 0.0061 & 0.0629 & k_{28} & 0.2225 & -1.8605 \end{bmatrix}$$

Os valores de k_{14} , k_{15} e k_{28} são dados de acordo com a tabela 3 para as diversas referências de velocidade.

Tabela 3 - Ganhos

wr0	k4	k5	k8
3000	-0,0812	4	4,4620
2500	-0,0823	3	3,7185

entrada degrau de 150 rad/s e alocação dos pólos para um padrão Bessel de quinta ordem e tempo de assentamento de 0,2 segundo, escolhido de forma a melhorar o desempenho.

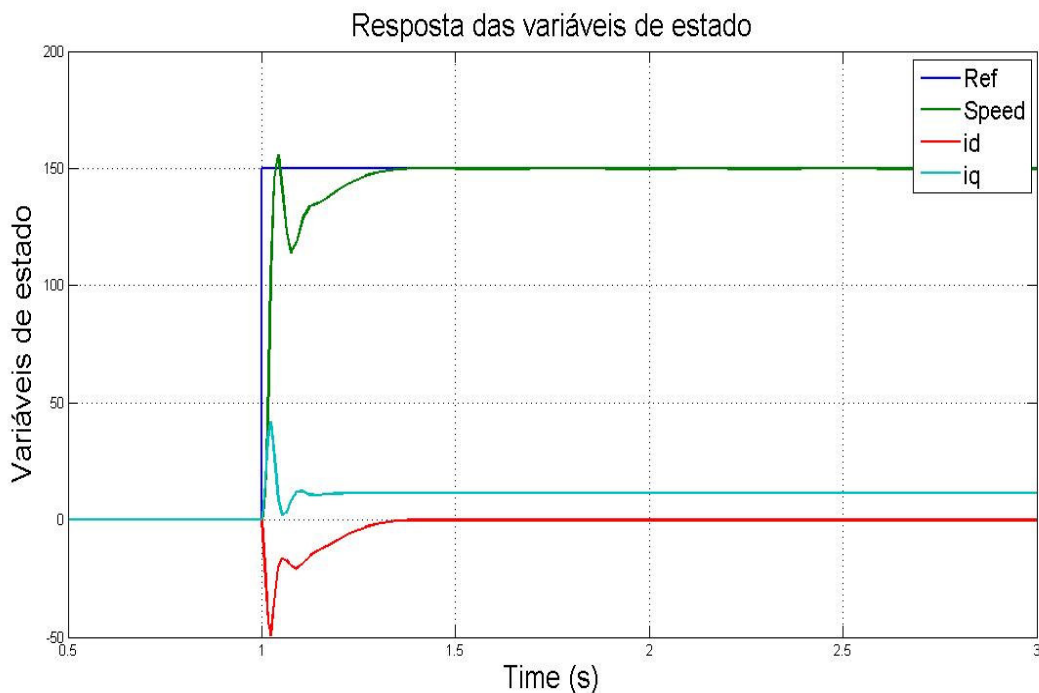


Figura 11 – Resposta do controle por alocação para entrada degrau

Observa-se que os valores de corrente crescem muito e a resposta de velocidade sofre uma oscilação durante sua subida, que em seguida segue o sinal. Após diversas alocações, concluiu-se que esta foi a melhor resposta que se poderia obter através deste método de projeto. Entretanto, ressalta-se aqui que para que as correntes não cresçam tanto durante a partida, deve-se adotar um perfil de velocidades.

Outro problema encontrado foi a pouca robustez do sistema de controle montado dessa maneira. O motor é um sistema instável em malha aberta e poucas alterações podem fazer com que sua saída oscile e cresça descontroladamente, assim como o sinal de controle. Por fim, a adição dos ganhos variáveis introduz mais

operações no sistema de controle. Por este ser embarcado num processador com recursos limitados, isso pode causar lentidão e diminuir o período de amostragem possível de ser alcançado. Analisa-se a seguir a utilização do método de projeto de um controlador Linear Quadrático Ótimo.

4.7. Projeto pelo método de Otimização Linear Quadrática (LQR)

Um controlador linear quadrático é projetado de forma a minimizar o índice de desempenho J :

$$J = \int_0^{+\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (4.19)$$

As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são chamadas matrizes de custo e devem ser matrizes Hermetianas definidas positivas (possuem autovalores positivos); $\mathbf{Q}$ representa o custo relativo ao desvio dos estados de seu valor de equilíbrio; $\mathbf{R}$ representa o custo do sinal de controle.

Para sistemas em tempo discreto, o índice de desempenho é dado por

$$J = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (4.20)$$

O processo de projeto de um Controlador Quadrático Ótimo começa com a escolha das matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ (normalmente começa-se com matrizes identidade). Em seguida, resolve-se a equação de Riccati:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.21)$$

Que na forma discreta será:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{H} (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \quad (4.22)$$

Obtido $\mathbf{P}$ através dessas equações, tem-se a matriz $\mathbf{K}$ através de:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.23)$$

Ou

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \quad (4.23)$$

O método LQR utilizado é um método iterativo, em que deve-se alterar os valores das diagonais de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$ de forma a obter a resposta desejada com a melhor amplitude do sinal de controle possível. O comando `lqr(SYS)` do matlab resolve a equação de ricatti para um determinado sistema.

A figura 12 ilustra a resposta de um sistema de controle de velocidade do motor por LQR com os mesmos parâmetros do exemplo anterior. Observe que aqui não foram utilizados ganhos variáveis; simulações demonstraram que o controlador ótimo para uma determinada condição (no caso, a maior velocidade alcançável, 3000 rpm) não deixa o sistema instável para outras condições.

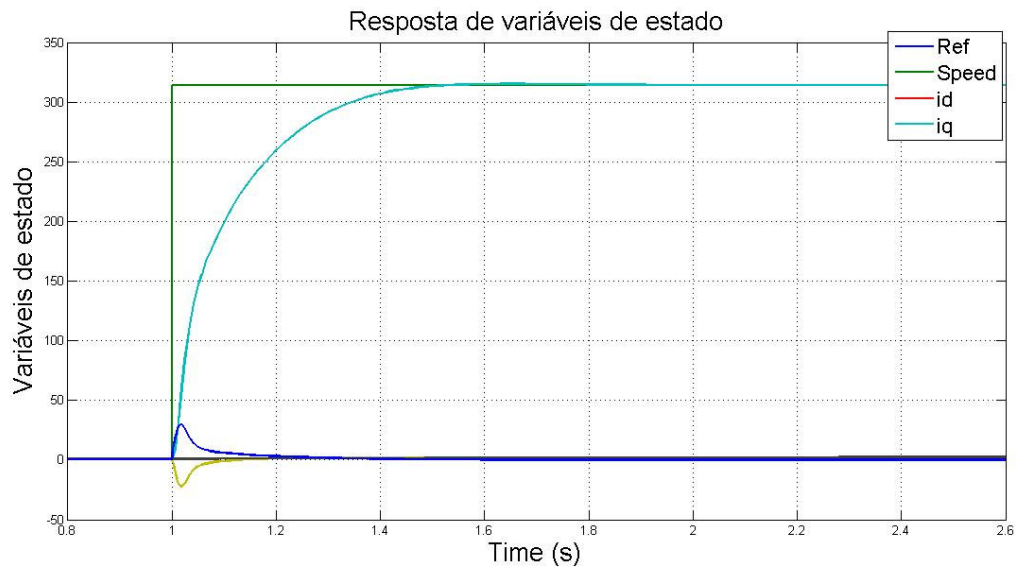


Figura 12 - Resposta do sistema utilizando LQR

As matrizes Q e R utilizadas foram

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de controle, $\mathbf{K}$ é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.9817 & 0.1902 & 1.7479 & 0.0344 & 1.6445 \\ -0.2690 & 1.3884 & 3.2890 & 0.2080 & -3.3407 \end{bmatrix}$$

O desempenho do sistema se mostra bem melhor que o feito através de alocação de pólos, com um tempo de assentamento de menos de 1 segundo (na medida em que o sistema sai da condição inicial de operação, este tempo aumenta um pouco, como pôde ser constatado na simulação para várias velocidades; o uso de faixas de ganho poderia melhorar os resultados). Entretanto, deve-se ressaltar que os valores de correntes são muito altos para a partida, ultrapassando os valores de pico especificados para esse motor. Para corrigir isso, ou relaxa-se nas matrizes

de custo, especialmente nos sinais de entrada, ou pode-se utilizar uma curva de aceleração, fazendo com que o sistema siga um perfil de velocidades, o que reduz o esforço de controle e a sobrecorrente.

Para os seguintes resultados foi utilizado um motor com menos potência que o ilustrado anteriormente, cujos parâmetros se encontram na tabela 4. Como critérios de projeto, considero-se que as correntes não poderiam passar de 10 A (corrente de pico para o motor exemplo) e a tensão de controle não poderia passar de 24V (tensão de saturação). Isso mostrou também que é bastante difícil fazer com que haja uma boa resposta dinâmica a degrau quando se quer manter uma corrente de partida baixa. Para um melhor desempenho, o ideal é que a velocidade final seja atingida através de um perfil, como ilustrado na figura 15.

Tabela 4 - Características do Motor

Atrito B	Inércia J	R	L	kt	kv
0.001	0.0000441	1,6	0,0014	0,054	0,006

Os resultados de simulações desse sistema, para controle de posição e velocidade se encontram nas figuras 15 e 16, respectivamente.

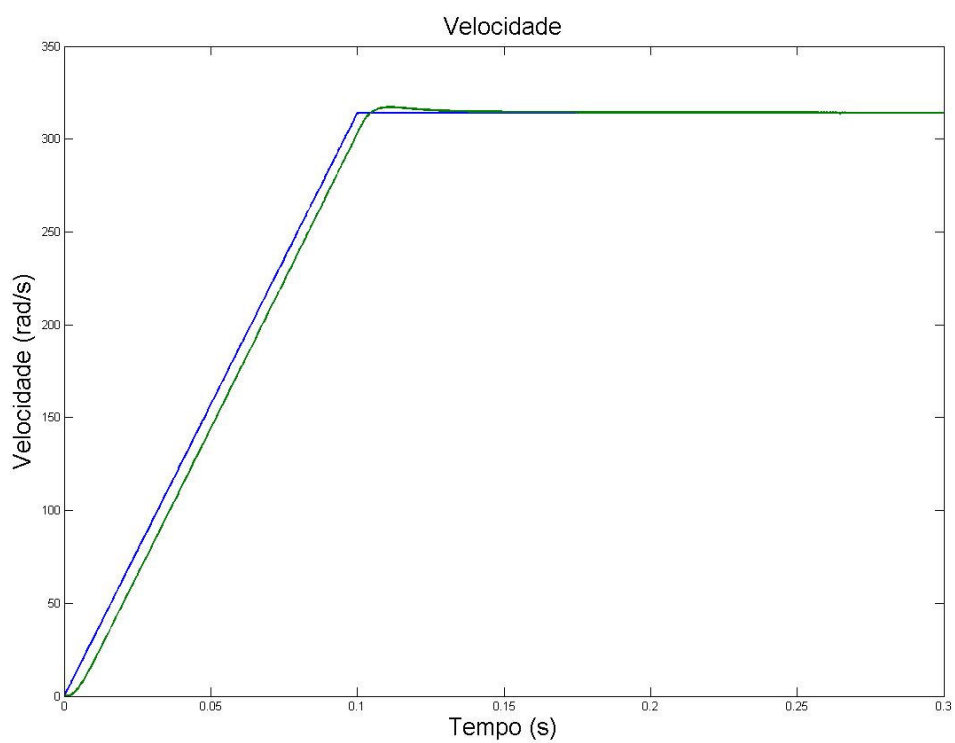


Figura 15 – Simulação da resposta de velocidade

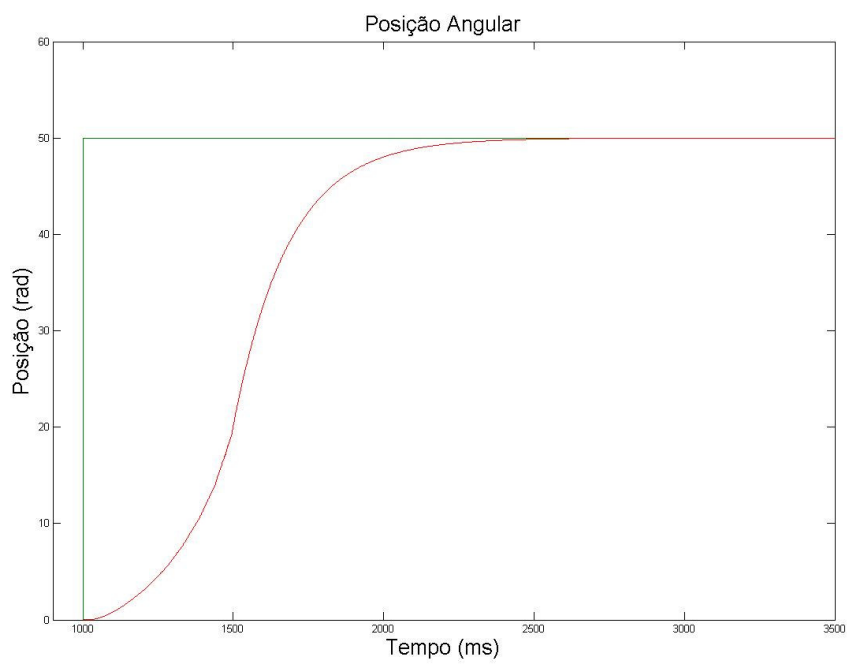


Figura 16 - Simulação da resposta de posição

Como se pode notar foi possível obter uma ótima resposta na simulação de velocidade e posição, apenas alterando os pesos das matrizes R e Q. No caso da velocidade, foi inserido um leve perfil na referência, de forma a minimizar a corrente de partida. Mesmo assim, em menos de 0.15 s é possível atingir cerca de 3000 rotações por minuto com um mínimo de sobressinal.

Os gráficos para respostas de corrente nas fases A, B e C (ou seja, as correntes reais após a transformada dq inversa) podem ser visualizados a seguir para ambos os tipos de controle (figuras 17 e 18).

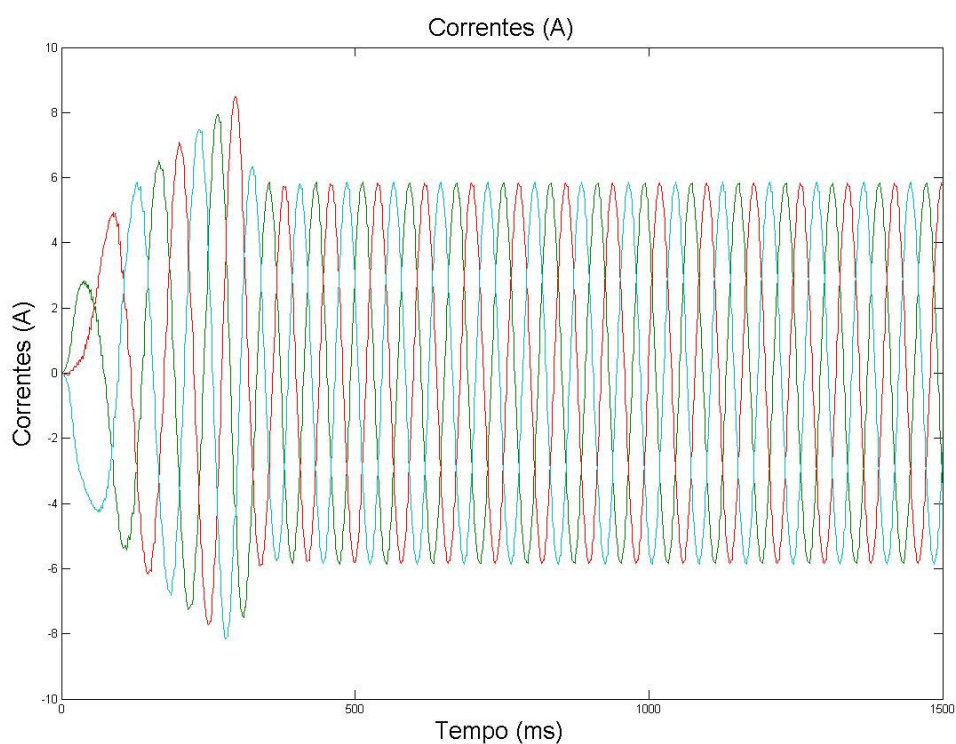


Figura 17 - Correntes em controle de Velocidade

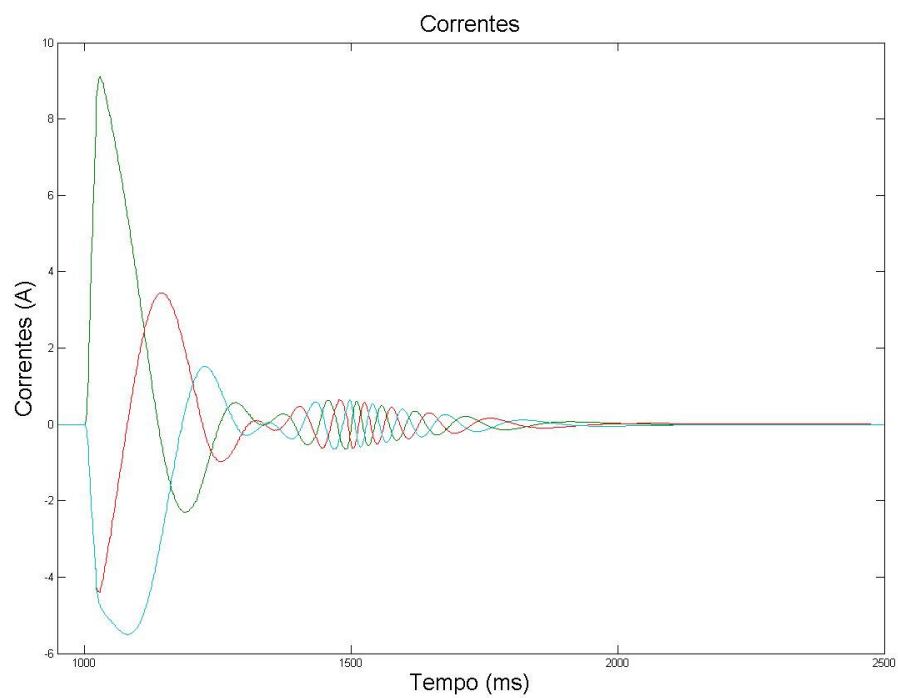


Figura 18 - Correntes em controle de Posição

Pode-se observar que é possível sintonizar o controlador de forma a manter os valores de correntes dentro do máximo permitido para o motor (10 A). Igualmente, é possível otimizar os sinais de controle (figuras 19 e 20).

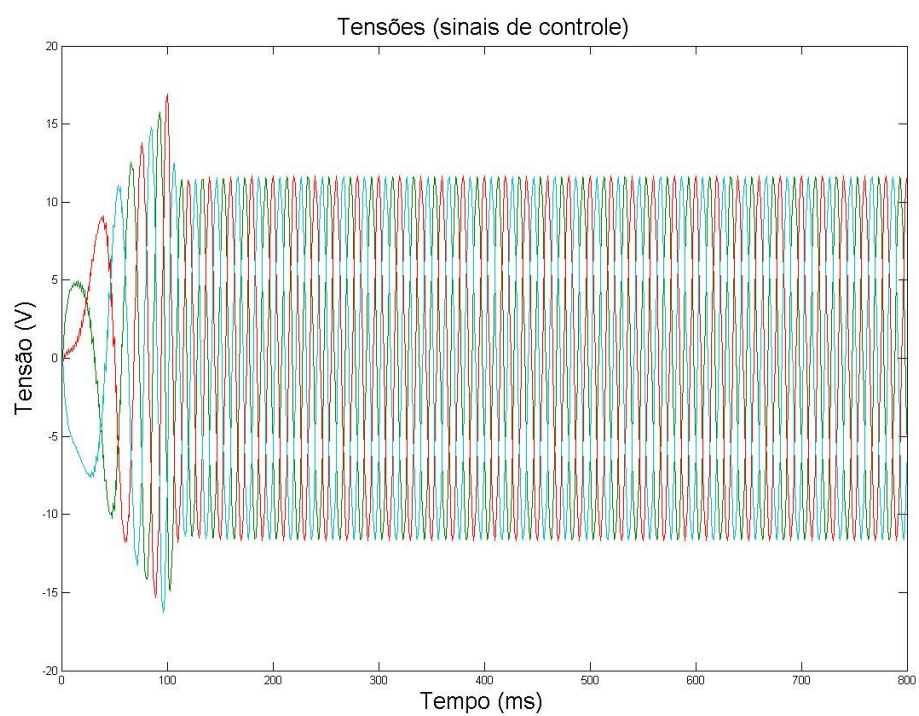


Figura 19 - Sinais de controle (Velocidade)

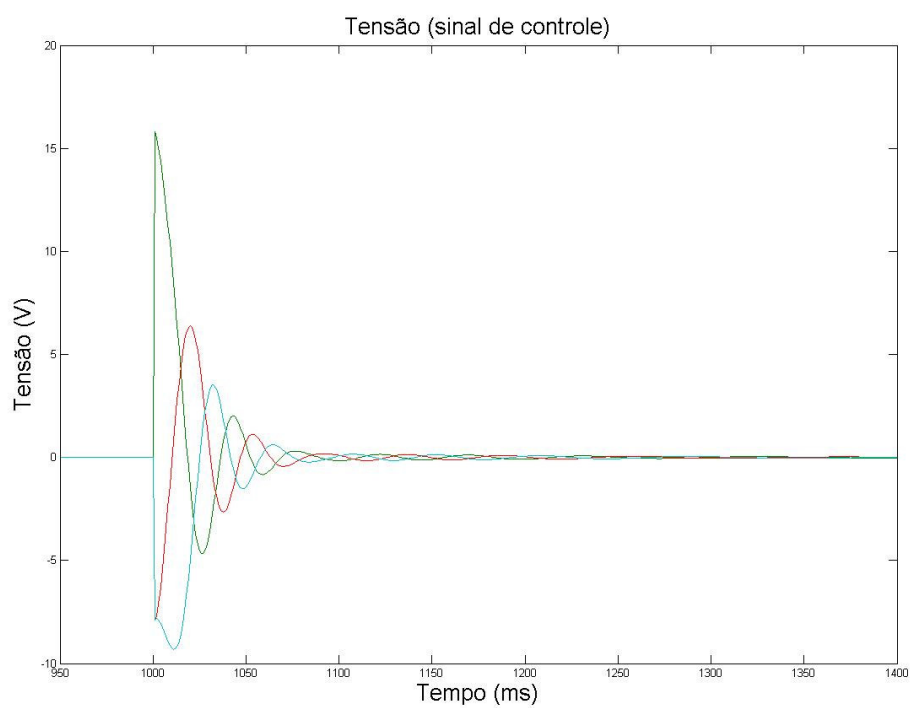


Figura 20 - Sinais de controle (Posição)

6. CONCLUSÃO

Os resultados de simulação do controle foram bastante satisfatórios, indicando que o sistema físico provavelmente responde da mesma forma. Algumas diferenças podem ser esperadas decorrentes de algumas variações nos parâmetros do motor, que se espera que sejam absorvidas pela robustez do controlador. O método de projeto através de LQR pode ser realizado de forma a se obter a melhor resposta dinâmica possível, mas sem que as limitações de saturação do sinal de controle ou limites físicos de corrente sejam atingidos. O controle multivariável, realizado através da realimentação de estados, se mostra bastante adequado para a aplicação em controle vetorial de motores trifásicos, especialmente os motores de ímã permanente sem escovas. As não-linearidades do sistema foram absorvidas pelo sistema de controle, especialmente no caso do projeto pelo método LQR. Melhorias neste mesmo sistema poderiam utilizar alterações dinâmicas das matrizes de ganho para diferentes faixas de atuação, aplicação de métodos de controle robusto, utilização de métodos para cancelamento das não-linearidades e até mesmo controle adaptativo. A adição de loops de *anti-windup* diminui problemas de saturação.

Passos seguintes neste projeto envolveriam a criação de um sistema físico de acionamento para testar o conceito. Uma vez criado um sistema de acionamento, deve-se ensaiar o motor para obter os parâmetros mais precisamente (minimizando erros de modelagem) e por fim, implementar o controlador, seja por interfaces analógicas-digitais com computadores ou com o uso de processadores digitais (microcontroladores ou DSP's).

7. REFERÊNCIAS

- Dote e Kinoshita, 1985 . Y. Dote and S. Kinoshita, "Brushless Servomotors: Fundamentals and Applications", Oxford: Claredon, 1985.
- Gieras e Wing, 1997. J. Gieras, M. Wing, "Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications", Marcel Dekker, 1997.
- Fitzgerald e Kingsley, 1990. A. Fitzgerald, C. Kingsley Jr. and S. Umans, "Electric Machinery", McGraw-Hill, 1990
- Ogata, 2003. K. Ogata, "Engenharia de Controle Moderno", Prentice Hall, 2003.
- Ogata, 1995. K. Ogata, "Discrete-Time Controls Systems", Prentice Hall, 1995.
- Pillay e Krishnan, 1988. P. Pillay and R. Krishnan, "Modeling of Permanent Magnet Motor Drives", 1988
- Martins, 2003. C. Martins, "Motores síncronos de relutância com barreiras de fluxo e partida assíncrona", 2003.
- Kaewjinda e Konghirun, 2007. W. Kaewjinda and M. Konghirun, "Vector Control Drive of Permanent Magnet Synchronous Motor Using Resolver Sensor", 2007.
- El-Sharkawi, 2000. M. El-Sharkawi, "Fundamentals of Electric Drives", Brooks/Cole, 2000.
- Astron e Wittenmark, 1984. K. Astrom and B. Wittenmark, "Computer Controlled Systems – Theory and Design", Claredon Press – Prentice Hall, 1984.

Apêndice A - Funções de Matlab para auxílio no projeto

```
function [Kv, Ky, Kr, J, B, kv, kt, R, L, wr0, Ts] = Position_Control_LQR()

p=6;
J = 0.0000441;
B = 0.00001349;
R = 1.6;
L = 0.0014;
kt = 0.054;
kv = (2*kt)/(3*p);
Ts = 1/20000;

[kw, ki] = kwki(kt, kv, B, R);

id0 = 0;
wr0 = 0;
iq0 = 3.75; %corrente que o motor aguenta continuamente

%Matrizes da planta - Contínuo
Ap = [-R/L iq0 wr0; 0 -B/J kt/J; wr0 (id0-kv/L) -R/L];
Bp = [1/L 0; 0 0; 0 1/L];
Mc = [Bp Ap*Bp Ap*Ap*Bp];

%Discretização das matrizes da planta

[Gp,Hp] = c2d(Ap,Bp,Ts);

%Controlabilidade
if rank(Mc)== 3
    fprintf('Sistema Controlável');
else
    fprintf('Sistema Não-Controlável');
end
%Matrizes com integrador - Contínuo

Ci = [zeros(2,1) eye(2) zeros(2)];
Ai = [zeros(2) eye(2) zeros(2,1); zeros(3,2) Ap];
Bi = [zeros(2); Bp];
Di = 0;

SYS = SS(Ai, Bi, Ci, Di);

%Matrizes com integrador - Discreto

Gi = [eye(2) eye(2) zeros(2,1); zeros(3,2) Gp];
Hi = [zeros(2); Hp];

SYSD = SS(Gi, Hi, Ci, Di, Ts);

%Matrizes de peso - Contínuo
%HQ = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%HR = [1 0; 0 1];
```

```

%HQ = [1 0 0 0 0; 0 5000 0 0 0; 0 0 50 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 10];
%HR = [10 0; 0 10];

%HQ = [1 0 0 0 0; 0 100 0 0 0; 0 0 50 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 10];
%HR = [10 0; 0 10];

HQ = [1 0 0 0 0; 0 50000 0 0 0; 0 0 50 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 10];
HR = [10 0; 0 10];

%Matrizes de peso - Discreto
%HQ = [1 0 0 0 0; 0 50000 0 0 0; 0 0 50 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%HR = [10 0; 0 10];

%HQ = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%HR = [1 0; 0 1];

[K, S, E] = lqr(SYS, HQ, HR);

Kv = [K(1,1); K(2,1)];
Ky = [K(1,2) K(1,3); K(2,2) K(2,3)];
Kr = [K(1,4) K(1,5); K(2,4) K(2,5)];

End

function [Kv, Ky, Kr, J, B, kv, kt, R, L, wr0, Ts] = Speed_Control_LQR()

p=6;
J = 0.0000441;
B = 0.001;
R = 1.6;
L = 0.0014;
kt = 0.054;
kv = (2*kt)/(3*p);
wr0 = 3000;
Ts = 1/20000;

[kw, ki] = kwki(kt, kv, B, R);

iq0 = ki * wr0/kw;
id0 = 0;

%Matrizes da planta - Contínuo
Ap = [-R/L iq0 wr0; 0 -B/J kt/J; wr0 (id0-kv/L) -R/L];
Bp = [1/L 0; 0 0; 0 1/L];
Mc = [Bp Ap*Bp Ap*Ap*Bp];

%Discretização das matrizes da planta

[Gp,Hp] = c2d(Ap,Bp,Ts);

%Controlabilidade
if rank(Mc)== 3
    fprintf('Sistema Controlável');
else
    fprintf('Sistema Não-Controlável');
end

```

```
%Matrizes com integrador - Contínuo
```

```
Ci = [zeros(2) eye(2) zeros(2,1)];
Ai = [Ci ; zeros(3,2) Ap];
Bi = [zeros(2); Bp];
Di = 0;
```

```
SYS = SS(Ai, Bi, Ci, Di);
```

```
%Matrizes com integrador - Discreto
```

```
Gi = [eye(2) eye(2) zeros(2,1); zeros(3,2) Gp];
Hi = [zeros(2); Hp];
```

```
SYSD = SS(Gi, Hi, Ci, Di, Ts);
```

```
%Matrizes de peso - Contínuo
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%R = [1 0; 0 1];
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 0.1];
%R = [1 0; 0 0.5];
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%R = [10 0; 0 5];
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.1 0; 0 0 0 0 1];
%R = [10 0; 0 5];
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 1];
%R = [10 0; 0 5];
```

```
%Q = [1 0 0 0 0; 0 0.1 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 1];
%R = [10 0; 0 5];
```

```
%MELHOR RESULTADO
```

```
HQ = [1 0 0 0 0; 0 0.1 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 5];
HR = [10 0; 0 5];
```

```
%Matrizes de peso - Discreto
```

```
%HQ = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
%HR = [1 0; 0 1];
```

```
%HQ = [0.1 0 0 0 0; 0 0.001 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 1];
%HR = [10000 0; 0 5000];
```

```
%HQ = [100000 0 0 0 0; 0 0.0001 0 0 0; 0 0 0.1 0 0; 0 0 0 0.01 0; 0 0 0 0 0.0001];
%HR = [1000 0; 0 100000];
```

```
[K, S, E] = lqr(SYSD, HQ, HR);
```

```
Kv = [K(1,1) K(1,2); K(2,1) K(2,2)];
Ky = [K(1,3) K(1,4); K(2,3) K(2,4)];
Kr = [K(1,5); K(2,5)];
```

```

function [Kv, Ky, Kr, J, B, kv, kt, R, L, wr0, Ts] = Parameters()

p=6;
J = 0.0000441;
B = 0.00001349;
R = 1.6;
L = 0.0014;
kt = 0.054;
kv = (2*kt)/(3*p);
disc = 500;
max_speed = 3000;
Ts = 1/20000;

[kw, ki] = kwki(kt, kv, B, R);

[wr0, iq0] = SpeedSteadyStates(max_speed, disc, kw, ki);
id0 = 0;

%Vetor de pólos desejados (Bessel)
P = [-10.4480*5, 5*(-4.1104+6.3142j), 5*(-4.1104-6.3142j), 5*(-5.9268+3.0813j), 5*(-5.9268-3.0813j)];

%Matrizes da planta
%Ap = [-R/L iq0(i) wr0(i); 0 -B/J kt/J; wr0(i) (id0-kv/L) -R/L];
%Bp = [1/L 0; 0 0; 0 1/L];
%Mc = [Bp Ap*Bp Ap*Ap*Bp];

%Controlabilidade
%if rank(Mc)== 3
%    fprintf('Sistema Controlável');
%else
%    fprintf('Sistema Não-Controlável');
%end

for i=1:1+max_speed/disc

%Matrizes com integrador
Ai = [0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 -R/L iq0(1+max_speed/disc)
wr0(1+max_speed/disc); 0 0 0 -B/J kt/J; 0 0 wr0(1+max_speed/disc) (id0-
kv/L) -R/L];
Bi = [0 0; 0 0; 1/L 0; 0 0; 0 1/L];
Ci = [0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0];
Di = 0;

SYS = SS(Ai, Bi, Ci, Di);
SYSD = c2d(SYS, Ts, 'zoh')

[Kv(:, :, 1+max_speed/disc), Ky(:, :, 1+max_speed/disc),
Kr(:, 1+max_speed/disc)] = SpeedControlGains(Ai, Bi, Ci, Ts);
end

for i=1:1+max_speed/disc
data4(i) = Ky(1,2,i);
data5(i) = Kr(1,i);

```

```
data8(i) = Ky(2,1,i);  
end  
r4 = polyfit(wr0, data4, 1);  
r5 = polyfit(wr0, data5, 1);  
r8 = polyfit(wr0, data8, 1);
```